פיתרון בוחן אמצע

מאת דורון אלעד

חלק א'-שאלות נכון/לא נכון

ענו על כל שש השאלות הבאות (אין צורך לנמק):
[כל תשובה נכונה על שאלות 1-5 מזכה ב-4 נקודות. תשובה נכונה על שאלה 6 מזכה ב-9 נקודות. סה"כ 29 נקודות לחלק זה]

1. $F(x,y)$ היא פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם ורק אם יש ל- $F(x,y)$ נגזרות חלקיות רציפות ב- (x_0,y_0).

פיתרון:
הטענה אינה נכונה, שכן לפונקציה דיפרנציאבילית אין בהכרח נגזרות חלקיות רציפות (מדובר על תנאי מספיק ולא הכרחי). דוגמא היא למשל הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

קל להוכיח כי מתקיים $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. לכן, הפונקציה תהיה דיפרנציאבילית אם יתקיים $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, וגם את זה קל להראות.

מאידך, אם נחשב את הנגזרת החלקית $f_x(x,y)$ בנקודות $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, נגלה כי:

$$f_x(x,y)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

וניתן לראות שהגבול שלה ב-(0,0) אינו 0 ולכן הנגזרת החלקית לפי x אינה רציפה.

---

2. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. אז:
$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ אם ורק אם $\lim\limits_{x\to a} f(x,b)=L$ וגם $\lim\limits_{y\to b} f(a,y)=L$.

<u>פיתרון:</u>

הטענה אינה נכונה. גם כאן, נכון רק כיוון אחד ולא השני.

נתבונן בפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}3 & , \ x\neq 0, y\neq 0\\ 0 & , \ x=0 \ or \ y=0\end{cases}$.

מתקיים ש- $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0$ אבל הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ כלל לא קיים.

---

3. תהי $f(x,y)$ פונקציה בשני משתנים, ו- $x(t),y(t)$ פונקציות במשתנה אחד.
אם $x(t),y(t)$ רציפות בנקודה $t=t_0$ ו- $f(x,y)$ רציפה בנקודה $\left(x(t_0),y(t_0)\right)$ אז הפונקציה המורכבת $g(t)=f(x(t),y(t))$ רציפה ב- $t=t_0$.

<u>פיתרון:</u>
הטענה נכונה.

---

4. לכל וקטור $\vec{u}$ מתקיים $\vec{u}\times\vec{u}=\underline{0}$.

<u>פיתרון:</u>
הטענה נכונה. $|\vec{u}\times\vec{u}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\sin(0)=0$ ומכאן שבהכרח $\vec{u}\times\vec{u}=\underline{0}$.

---

5. לכל שלושה וקטורים $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ מתקיים: $\left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right|=\left|\vec{v}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)\right|$

<u>פיתרון:</u>

הטענה נכונה.
מתקיים: $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=-\vec{v}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)$ ובפרט $\left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right|=\left|\vec{v}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)\right|$.

---

6. לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבע האם היא פתוחה, סגורה, פתוחה וסגורה, לא פתוחה ולא סגורה, קשירה או חסומה (תיתכן קבוצה עם מס' תכונות נכונות):

<u>פיתרון:</u>

הקבוצה	פתוחה	קשירה	חסומה
$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$	כן	כן	כן
$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=22\}$	לא	כן	לא
תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\frac{1}{y}$	כן	לא	לא

חלק ב'-שאלות רב-ברירתיות

בכל אחת משבע השאלות הבאות, הקף את התשובה הנכונה (אין צורך לנמק):
[כל תשובה נכונה מזכה ב-6 נקודות. סה"כ 42 נקודות לחלק זה]

7. שטח המשולש $\triangle ABC$ כאשר $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ שווה ל:

א. 27

ב. $3\sqrt{3}$

ג. $6\sqrt{3}$

ד. $1.5\sqrt{3}$

ה. שלוש הנקודות A,B,C כלל לא יוצרות משולש

פיתרון:

התשובה הנכונה היא **ב**.

נסמן: $\vec{u}=B-A=(-1,-1,6)$ ו- $\vec{v}=C-A=(-2,0,2)$.

כעת נשתמש במכפלה וקטורית:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}|(2,-10,2)|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+10^2+2^2}=3\sqrt{3}$$

---

8. נתונים וקטורים $\vec{a},\vec{b}$ שעבורם $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$ כך שהזווית ביניהם היא $\theta=\frac{\pi}{3}$.

אז המכפלה הסקלרית $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(4\vec{a}+\vec{b})$ שווה ל-:

א. -3

ב. 0

ג. 15

ד. -9

ה. 12

פיתרון:

התשובה הנכונה היא **ג.**

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(4\vec{a}+\vec{b})=-5\vec{a}\cdot\vec{b}+12|\vec{a}|^2-2|\vec{b}|^2=-5|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+12|\vec{a}|^2-2|\vec{b}|^2=$$

$$=-5\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+12\cdot4-2\cdot9=15$$

---

9. הישר ℓ הינו ישר החיתוך של שני המישורים:

$$\pi_1 : 2x - y - 2z + 3 = 0$$

$$\pi_2 : x + 2y + z + 4 = 0$$

אז ℓ חותך את המשטח $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ בנקודה:

א. $(1,2,2)$

ב. $(-1,3,-3)$

ג. $(5,1,5)$

ד. $(1,-5,5)$

ה. $(2,-1,2)$

פיתרון:

התשובה הנכונה היא **ד**.

הישר ℓ הוא $\ell : \underline{x} = \left(0, \frac{-11}{3}, \frac{10}{3}\right) + t\left(1, \frac{-4}{3}, \frac{5}{3}\right), t \in \mathbb{R}$.

כלומר:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{4t}{3} - \frac{11}{3} \\ z = \frac{5t}{3} + \frac{10}{3} \end{cases}$$

אם נציב זאת במשוואה $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, נקבל כי t=1 ומכאן ש-

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}.$$

---

10. הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{xy} - 1}{|x| + |y|}$ שווה ל-:

א. $\ln 2$

ב. 2

ג. 0

ד. 1

ה. לא קיים

פיתרון:

התשובה הנכונה היא **ג**.

אינטואיטיבית: $2^{xy} \to 1$ מהר יותר מאשר $|x|+|y| \to 0$.

פורמלית: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{xy}-1}{|x|+|y|} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{2^{xy}-1}{xy}}_{\to \ln 2} \cdot \underbrace{\frac{xy}{|x|+|y|}}_{\to 0} = 0$.

---

11. נתונה פונקציה $f(x,y)$ שדיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0).

בנוסף נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{p_1}} = 1$ ו- $\frac{\partial f}{\partial \vec{p_2}} = 2$ כאשר $\vec{p_1} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ ו- $\vec{p_2} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

מהו הערך המקסימלי שיכולה לקבל הנגזרת המכוונת של f בנקודה (x_0,y_0)?

א. $\sqrt{15}$

ב. $\sqrt{5}$

ג. $\sqrt{3}$

ד. 5

ה. 3

פיתרון:

התשובה היא **ב.**

הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) ולכן בנקודה זו מתקיים:

$\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \nabla f \cdot \vec{p}$. מהנתונים נקבל אפוא כי:

$$1 = \frac{4}{5}u_x - \frac{3}{5}u_y \Leftarrow 1 = (u_x,u_y)\cdot\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{p_1}} = 1$$

$$2 = \frac{3}{5}u_x + \frac{4}{5}u_y \Leftarrow 2 = (u_x,u_y)\cdot\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{p_2}} = 2$$

כאשר u_x,u_y מסמנים את הנגזרות החלקיות לפי x ו-y בנקודה (x_0,y_0) הנתונה.

פיתרון מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 1 = \frac{4}{5}u_x - \frac{3}{5}u_y \\ 2 = \frac{3}{5}u_x + \frac{4}{5}u_y \end{cases}$$

מניב: $(u_x,u_y) = (2,1)$.

אנו יודעים שערכה המקסימלי של הנגזרת המכוונת של f בנקודה (x_0, y_0) הוא $\|(u_x,u_y)\|=\|(2,1)\|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$. משי"ל

---

12. נתונה הפונקציה $F(x)=\int_x^{x^2}(x^2+y^2)dy$. אז $F'(1)$ שווה ל- :

א. 0
ב. 1
ג. -1
<u>ד. 2</u>
ה. -2

<u>פיתרון:</u>
התשובה הנכונה היא **<u>ד</u>**.

$$F'(x)=2x^5+4x^3-4x^2 \Leftarrow F(x)=\int_x^{x^2}(x^2+y^2)dy$$

ולכן $F'(1)=2$.

---

13. נתונה המשוואה $x^2-3xy+y^3=7$. ערכה של הנגזרת $\frac{dy}{dx}\Big|_{(4,3)}$ הוא :

א. המשוואה כלל לא מקיימת את משפט הפונקציות הסתומות בנקודה זו ולכן לא ניתן לדעת בוודאות.
ב. המשוואה מקיימת את משפט הפונקציות הסתומות, אך לא ניתן לקבוע את ערך הנגזרת.
<u>ג. המשוואה מקיימת את משפט הפונקציות הסתומות בסביבת הנקודה (4,3) ובהכרח מתקיים ש- $\frac{dy}{dx}\Big|_{(4,3)}=\frac{1}{15}$.</u>
ד. המשוואה מקיימת את משפט הפונקציות הסתומות בסביבת הנקודה (4,3) ובהכרח מתקיים ש- $\frac{dy}{dx}\Big|_{(4,3)}=0$.
ה. המשוואה מקיימת את משפט הפונקציות הסתומות בסביבת הנקודה (4,3) ובהכרח מתקיים ש- $\frac{dy}{dx}\Big|_{(4,3)}=-\frac{1}{15}$.

<u>פיתרון:</u>
התשובה היא **<u>ג.</u>**
נסמן : $g(x,y)=x^2-3xy+y^3-7$ ונתבונן במשוואה $g(x,y)=0$. זוהי בדיוק המשוואה הנתונה בשאלה ובבירור מתקיימים התנאים של משפט הפונקציות הסתומות.
לכן :

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(4,3)}=\left(-\frac{\overbrace{2x-3y}^{=g_x}}{\underbrace{-3x+3y^2}_{g_y}}\right)_{(4,3)}=\frac{1}{15}.$$

חלק ג'- שאלות פתוחות

ענה על שתי השאלות שלפניך:
הקפד לנמק כל צעד ולכתוב בכתב ברור [פיתרון מלא ונכון לשאלה 14 יזכה ב-17 נקודות ופיתרון מלא ונכון לשאלה 15 יזכה ב-17 נקודות. סה"כ 34 נקודות לחלק זה]

14. כדור קטן מוחזק על פני שטח המתואר ע"י המשטח $z=x^3+xy+y^3$ בנקודה $(1,2,11)$.
משחררים את הכדור והוא מתחיל לנוע.
מה יהיה וקטור הכיוון של תנועת הכדור?

פיתרון:

המשטח נתון ע"י המשוואה $F(x,y,z)=z-x^3-xy-y^3$.

נסמן: $f(x,y)=x^3+xy+y^3$.

שתי הפונקציות הנתונות הן דיפרנציאביליות (למשל מכיוון שהן פולינומים ולכן יש להן נגזרות חלקיות רציפות).

מתקיים: $\vec{\nabla}f(1,2)=(3x^2+y,x+3y^2)|_{(1,2)}=(5,13)$.

הכדור ינוע מן הסתם בכיוון הירידה התלולה ביותר, כלומר בכיוון $-\vec{\nabla}f(1,2)=(-5,-13)$.

נסמן את הכיוון במרחב ב- $(-5,-13,\alpha)$.

מתקיים: $\vec{\nabla}F(1,2,11)=(-5,-13,1)$.

מכיוון שהגרדיאנט מאונך למשטחי הרמה, והמשטח שלנו הוא משטח הרמה של F המתאים לרמה 0, נקבל כי בהכרח:

$(-5,-13,\alpha)\cdot(-5,-13,1)=0$ ומכאן ש- $\alpha=-25-169=-194$.

כלומר, כיוון תנועת הכדור יהיה:
$(-5,-13,-194)$.

משי"ל

---

15. תהי $u(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני בתחום $D=(0,\infty)\times(0,\infty)$. נגדיר: $v(s,t)=u(e^{s+t},e^{s-t})$.
הוכיחו כי $x^2u_{xx}+xu_x=y^2u_{yy}+yu_y$ אם ורק אם $v_{st}=0$.

<u>פיתרון:</u>

לפי נתון, $u(x,y)$ היא פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בתחום $(0,\infty)\times(0,\infty)$ ובפרט $u(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל נקודה $(x_0,y_0)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$.

בנוסף, הפונקציות $x(s,t)=e^{s+t},\ y(s,t)=e^{s-t}$ גזירות חלקית לפי s ולפי t בכל נקודה בתחום (כהרכבה של פונקציות גזירות).

לכן, הפונקציה $v(s,t)=u(e^{s+t},e^{s-t})$ גזירה חלקית לפי s ולפי t בכל נקודה (s_0,t_0) ונוכל להשתמש בכלל השרשרת.

נגזור אפוא לפי כלל השרשרת, וכלל המכפלה (בהמשך) ונקבל:

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\Downarrow$$
$$v_s=u_x\cdot e^{s+t}+u_y\cdot e^{s-t}$$
$$\frac{\partial v_s}{\partial t}\overset{(1)}{=}\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\cdot e^{s+t}+u_x(e^{s+t})'_t+\frac{\partial u_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\cdot e^{s-t}+u_y\cdot(e^{s-t})'_t$$
$$v_{st}=u_{xx}\cdot e^{s+t}\cdot e^{s+t}+u_x\cdot e^{s+t}+u_{yy}\cdot e^{s-t}\cdot(-1)\cdot e^{s-t}+u_y\cdot e^{s-t}\cdot(-1)$$
$$v_{st}\overset{(2)}{=}u_{xx}\cdot x^2+u_x\cdot x-u_{yy}\cdot y^2-u_y\cdot y$$

ב-(1) נעשה שימוש בשוויון הנגזרות המעורבות, שתקף פה מכיוון של-v יש נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני לפי נתון.
ההסבר ל- (2) הוא שעל פי מה שהוגדר בשאלה $e^{s+t}=x\ ,\ e^{s-t}=y$

כעת, **<u>כיוון אחד:</u>** אם $v_{st}=0$ הרי שנקבל $u_{xx}\cdot x^2+u_x\cdot x-u_{yy}\cdot y^2-u_y\cdot y=0$

ז"א $v_{st}=0 \quad\Leftarrow\quad x^2u_{xx}+xu_x=y^2u_{yy}+yu_y$

<u>כיוון שני:</u> אם מתקיים $x^2u_{xx}+xu_x=y^2u_{yy}+yu_y$ אז
$u_{xx}\cdot x^2+u_x\cdot x-u_{yy}\cdot y^2-u_y\cdot y=0$

ז"א: $x^2u_{xx}+xu_x=y^2u_{yy}+yu_y \quad\Leftarrow\quad v_{st}=0$

הוכחנו את שני הכיוונים ולכן $x^2u_{xx}+xu_x=y^2u_{yy}+yu_y$ אם ורק אם $v_{st}=0$.